CS : Cocyclicité

Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité. Applications.

0.1 Ptolémée par les cocyclicités

La caractérisation des quadrilatères convexes inscriptibles démontrée dans l'exercice suivant est connue sous le nom de Théorème de Ptolémée.

Exercice 1 *Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :*

"Un quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si le produit de ses diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés, autrement dit $AC.BD = AB.CD + AD.BC$ (†)."

en utilisant des cocyclicités, la formule des sinus, et le Théorème de Simson.

1) Rappeler (sans proposer de démonstrations) la formule des sinus, l'énoncé du Théorème de Simson et la définition des droites de Simson d'un triangle.

2) Dans cette question, on suppose que le quadrilatère $ABCD$ est convexe et inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R. On note C_0, A_0, B_0 les projetés orthogonaux de D sur les droites (AB), (BC) et (CA)

a) Faire une figure.

b) En utilisant des cocyclicités et la formule des sinus, démontrer que

$$B_0C_0 = \frac{BC \times AD}{2R}; \quad C_0A_0 = \frac{CA \times BD}{2R} \quad \text{et } A_0B_0 = \frac{AB \times CD}{2R}.$$

c) En admettant le résultat suivant : "Lorsque D parcourt $\mathcal{C}$, le quadrilatère $ABCD$ est convexe si et seulement si B_0 appartient au segment $[A_0C_0]$", démontrer l'égalité $AC.BD = AB.CD + AD.BC$.

3) Démontrer la réciproque : si $ABCD$ est un quadrilatère convexe tel que $AC.BD = AB.CD + AD.BC$, alors $ABCD$ est inscrit dans un cercle.
(On pourra utiliser les points C_0, A_0, B_0 et la question 2.a.)

4) Que peut-on dire au sujet des quadrilatère non convexes ?

Solution : 1) Il faut savoir répondre à cette première question, et connaître les démonstrations des deux résultats annoncés.
On rappelle donc que :

---

[0] [ucoc0004cs] v1.00 /utri0042
Site internet : MegaMaths Complément Spécial

[0] Leçon d'oral n°31 de la session 2008 du CAPES externe, traitée dans le Vol. III [7].

▶ **Formule des sinus** : Les longueurs des côtés, les sinus des angles, l'aire S et le rayon du cercle circonscrit R à un triangle ABC sont liés par les relations ([6] Th. 137) :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}.$$

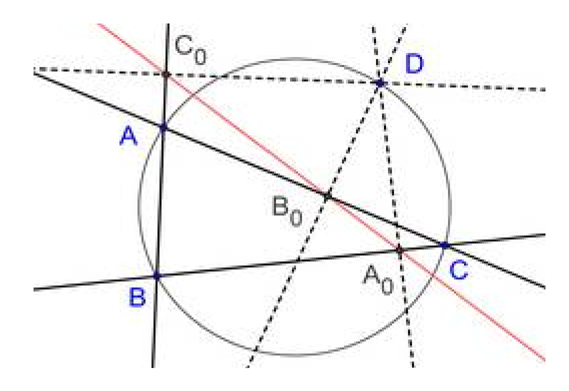


FIG. 1 – Droite de Simson $(A_0B_0C_0)$ de D relative au triangle ABC

▶ **Théorème de Simson** : Un point D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si ses projetés orthogonaux C_0, A_0, B_0 sur les supports (AB), (BC) et (CA) des côtés du triangle sont alignés (FIG. 1). La preuve de ce résultat est donnée par exemple en [7] Th. 99.

▶ Avec les notations de la FIG. 1, la droite $\Delta = (A_0B_0C_0)$ est appelée droite de Simson de D relative au triangle ABC. Rappelons au passage que les symétriques de D par rapport aux côtés du triangle sont aussi alignés sur l'image de la droite Δ par l'homothétie de centre D et de rapport 2. Cette dernière droite est appelée droite de Steiner de D relative au triangle ABC.

2.a) Voir FIG. 1.

2.b) $[AD]$ est l'hypoténuse commune des deux triangles rectangles ADB_0 et ADC_0. Les points A, D, B_0 et C_0 sont donc cocycliques (ils appartiennent au cercle de diamètre $[AD]$). La formule des sinus dans le triangle AB_0C_0 donne

$$\frac{B_0C_0}{\sin \widehat{B_0AC_0}} = AD, \quad \text{soit} \quad \frac{B_0C_0}{\sin \widehat{A}} = AD$$

puisque, suivant les figures, les angles $\widehat{B_0AC_0}$ et $\widehat{A} = \widehat{BAC}$ sont soit égaux, soit supplémentaires. La formule des sinus dans le triangle ABC donne

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = 2R.$$

Par suite $B_0C_0 = \dfrac{BC \times AD}{2R}$.

Utiliser les deux autres cocyclicités sur les cercles de diamètres $[BD]$ et $[CD]$ revient à faire une permutation circulaire sur la formule précédente. On obtient alors :

$$C_0A_0 = \frac{CA \times BD}{2R} \quad \text{et} \quad A_0B_0 = \frac{AB \times CD}{2R}.$$

Remarque : En utilisant la formule des sinus dans le triangle AB_0C_0, on suppose implicitement que AB_0C_0 n'est pas un triangle aplati. Mais il peut en être autrement et il est facile d'imaginer comment placer D pour avoir $A = C_0$. Ces cas particulier ne sont pas gênants car on peut les traiter "en passant à la limite" et en utilisant des applications continues. En effet, si D_l désigne une position limie du point D sur le cercle pour laquelle AB_0C_0 est aplati, il suffit d'écrire la formule $B_0C_0 = \frac{BC \times AD}{2R}$ pour tous les autres points D distincts de D_l et proches de D_l, puis de passer à la limite dans cette égalité lorsque D tend vers D_l en utilisant la continuité des applications "distance entre deux points", pour conclure au même type d'égalité concernant D_l.

2.c) Les points A_0, B_0 et C_0 sont alignés sur la droite de Simson relative à D, et on admet que la convexité du quadrilatère nous donne : $B_0 \in [A_0C_0]$. Alors $A_0C_0 = A_0B_0 + B_0C_0$, et en remplaçant :

$$\frac{CA \times BD}{2R} = \frac{AB \times CD}{2R} + \frac{BC \times AD}{2R}$$

d'où l'égalité (†).

3) Si $ABCD$ est un quadrilatère convexe, on aura montré l'équivalence

$$ABCD \text{ inscriptible} \Leftrightarrow AC.BD = AB.CD + AD.BC$$

dès qu'on aura montré les deux implications :

(1) : $ABCD$ inscriptible $\Rightarrow AC.BD = AB.CD + AD.BC$.

(2) : $ABCD$ non inscriptible $\Rightarrow AC.BD < AB.CD + AD.BC$.

On a déjà démontré l'implication (1) dans la question 2. Montrons (2). Si le quadrilatère convexe $ABCD$ n'est pas inscriptible dans un cercle, D n'appartient pas au cercle circonscrit au triangle ABC, et les points A_0, B_0, C_0 ne sont pas alignés. Le triangle $A_0B_0C_0$ n'est pas aplati, et les inégalités triangulaires sont strictes. En particulier $A_0C_0 < A_0B_0 + B_0C_0$, d'où

$$\frac{CA \times BD}{2R} < \frac{AB \times CD}{2R} + \frac{BC \times AD}{2R}$$

et enfin $AC.BD < AB.CD + AD.BC$.

4) Si $ABCD$ n'est pas convexe tout en étant inscrit dans un cercle, on peut toujours tracer un quadrilatère convexe ayant les mêmes sommets, puis appliquer le Théorème de Ptolémée à ce quadrilatère. Les distances qui interviennent alors dans l'égalité de Ptolémée n'ont pas le même statut dans $ABCD$, puisque des côtés deviendront des diagonales, et réciproquement, mais on obtient tout de même une relation entre ces différentes longueurs !
Somme toute, supposer que notre quadrilatère est convexe est raisonnable si l'on ne s'intéresse qu'à obetnir des relations entre les longueurs des côtés et les longueurs des diagonales.

Remarques : α) Une démonstration du Théorème de Ptolémée utilisant des affixes de points est proposée dans la leçon sur les modules et arguments des nombres complexes ([8], Th. 21).

β) La preuve proposée dans cet exercice est tirée d'un livre de Coxeter [1] et peut être utilisée dans une leçon d'oral de concours sur la cocyclicité, les droites remarquables d'un triangle, ou encore les relations trigonométriques dans un triangle (puisqu'on utilise la formule des sinus de façon cruciale !). On pourra donc retenir cette démonstration pour l'utiliser le moment opportun.

0.2 Un quadrangle inscriptible particulier

Il est possible de retenir la situation évoquée dans l'exercice qui suit pour agrémenter une leçon d'oral d'un concours. Je pense évidemment à la leçon sur la cocyclicité, mais nous avons là aussi une application de la caractérisation d'un triangle isocèle qui utilise des angles de droites... donc une application sur la "géométrie du triangle".

Bref, cet exercice risque de laisser des traces dans son esprit, et ces traces risquent de nous revenir en mémoire pendant les heures de préparation de l'exposé. Donc : c'est bon à prendre ! Et d'ailleurs je recopie celui-ci dans mon "projet long terme" de livres sur les Questions-Réponses sur les fondamentaux en géométrie. Le voici :

Exercice 2 *Les diagonales d'un quadrilatère inscriptible dans un cercle sont perpendiculaires et se coupent en O. Montrer que toute droite passant par O et perpendiculaire à l'un des côtés coupe le côté opposé en son milieu.*

Solution : La FIG. 2 représente un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle, dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en O. Il s'agit de montrer que P est le milieu de $[AD]$.
Par cocyclicité, les angles orientés de droites suivants sont égaux (les mesures de ces angles ne sont pas indispensables ici : je n'écris (π) que pour rappeler

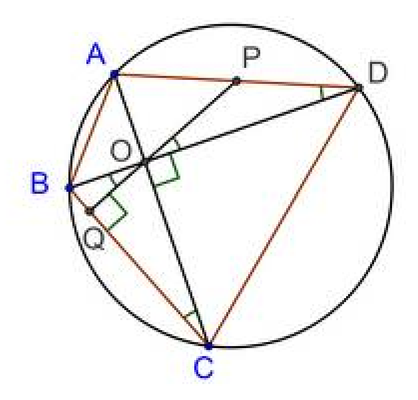


FIG. 2 – Une application de la cocyclicité

qu'il s'agit d'angles orientés de droites) :

$$(DA, DB) = (CA, CB) \ (\pi) \quad (1)$$

Les droites (BC) et (AC) sont respectivement perpendiculaires aux droites (PQ) et (BD), donc

$$(CA, CB) = (OB, OQ) = (OD, OP) \ (\pi) . \quad (2)$$

(1) et (2) donnent $(DP, DO) = (OD, OP) \ (\pi)$, ce qui démontre que le triangle ODP est isocèle en P (des angles de droites de la base égaux suffisent pour "faire" un triangle isocèle : voir [6], Th. 63).
On démontrerait de la même façon que le triangle OAP est isocèle en P, de sorte que l'on puisse écrire $AP = OP = PD$. Le point P est bien le milieu de $[AD]$.

0.3 Une généralisation du Théorème de Napoléon

Exercice 3 *Sur les côtés d'un triangle ABC et à l'extérieur de celui-ci, on construit trois triangles BAP, CBQ et ACR de sorte que la somme des trois angles de ces triangles opposés aux côtés $[BA]$, $[CB]$ et $[AC]$ soit égale à un angle plat. On note O_P, O_Q et O_R les centres des cercles circonscrits $\mathcal{C}_P$, $\mathcal{C}_Q$, $\mathcal{C}_R$ aux triangles BAP, CBQ et ACR.*

1) a) Montrer que les cercles $\mathcal{C}_P$, $\mathcal{C}_Q$, $\mathcal{C}_R$ concourent en un point M.

b) Si les triangles BAP, CBQ et ACR sont semblables, démontrer que le triangle $O_PO_QO_R$ est encore semblable à ces derniers. (Ind. : on pourra

utiliser des angles de droites.)

c) Lorsque les triangles BAP, CBQ et ACR sont équilatéraux, $O_PO_QO_R$ est appelé "triangle extérieur de Napoléon du triangle ABC". Démontrer qu'un triangle extérieur de Napoléon est équilatéral.

2) Dessiner la figure dans le cas particulier où les points A, B, C appartiennent respectivement aux droites (PR), (QP) et (RQ). Enoncer alors le résultat obtenu à la question 1.a) (ce résultat constitue un théorème démontré par Miquel en 1838).

3) On reste dans les hypothèses fortes de la question précédente, et on suppose, en outre, que les points A, B, C sont alignés. Dessiner une figure dans ce cas limite et énoncer le "nouveau" résultat obtenu.

Solution : 1.a) Sur la FIG. 3, M désigne le second point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_P$ et $\mathcal{C}_Q$. Dans toute la suite, on supposera que M est distinct des sommets du triangle ABC, en notant bien que la preuve obtenue s'adapterait sans difficulté aux cas où M serait égal à A, B ou C en remplaçant une des droite (MA), (MB) ou (MC) par une tangente commune à deux cercles parmi $\mathcal{C}_P$, $\mathcal{C}_Q$, $\mathcal{C}_R$.

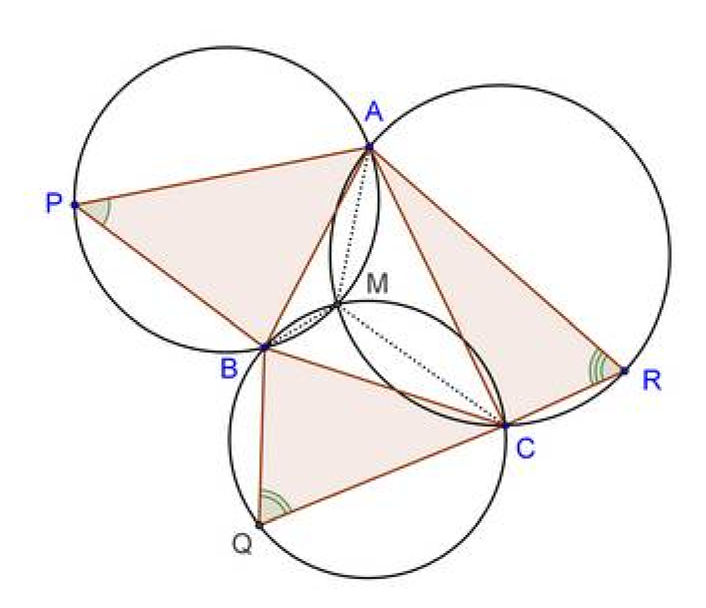


FIG. 3 – Trois triangles extérieurs

Par cocyclicité, et en utilisant des angles de droites orientés :

$$\begin{aligned}(MA, MC) &= (MA, MB) + (MB, MC)\\ &= (PA, PB) + (QB, QC)\\ &= \pi - (RC, RA) \ = \ (RA, RC)\end{aligned}$$

et l'égalité $(MA, MC) = (RA, RC)$ entre des angles de droites nous assure que M appartient à $\mathcal{C}_R$. Ainsi $\mathcal{C}_P \cap \mathcal{C}_Q \cap \mathcal{C}_R = \{M\}$.

1.b) Les droites $(O_P O_Q)$ et $(O_P O_R)$ sont respectivement perpendiculaires à (MB) et (MA). En utilisant la cocyclicité des points M, A, P, B on obtient

$$(O_P O_Q, O_P O_R) = (MB, MA) = (PB, PA)$$

(égalités d'angles de droites). De même, et par permutation circulaire, on obtient

$$(O_Q O_R, O_Q O_P) = (MC, MB) = (QC, QB)\,,$$

où (QC, QB) est un angle de droite qui se retrouve dans le triangle ABP puisque ABP et CBQ sont supposés semblables. Les triangles $O_Q O_R O_P$ et BAP possèdent donc deux angles de droites égaux, et seront semblables pour cette raison ([3], Th. 263).

1.c) On applique le résultat de la question précédente : $O_P O_Q O_R$ sera semblable aux triangles équilatéraux construits sur le triangle ABC, donc sera lui-même équilatéral.

Remarque : Une démonstration du Théorème de Napoléon utilisant les complexes est donnée en [3], Th. 155. On vérifie alors que les centres de gravité de ABC et de $O_P O_Q O_R$ sont identiques.

2) On peut dessiner la FIG. 4 et énoncer :

> **Résultat n°1** : Etant donné un triangle PQR et des points A, B, C appartenant aux droites (PR), (QP) et (RQ) et différents de ses sommets, les cercles circonscrits aux triangles PAB, QBC et RCA sont concourants.

Remarque : Le résultat n°1 a été utilisé dans l'exposé-type de la leçon sur la cocyclicité proposée dans le Vol. III ([7], Th. 95). C'est une application sympathique du critère de cocyclicité en terme d'angles de droites.

3) Rien ne nous empêche de supposer que les points A, B et C sont alignés, pour obtenir la FIG. 5.
On peut appliquer la première question car les triangles BAP, CBQ et ACR définissent des angles de droites en P, Q et R dont la somme est nulle (en

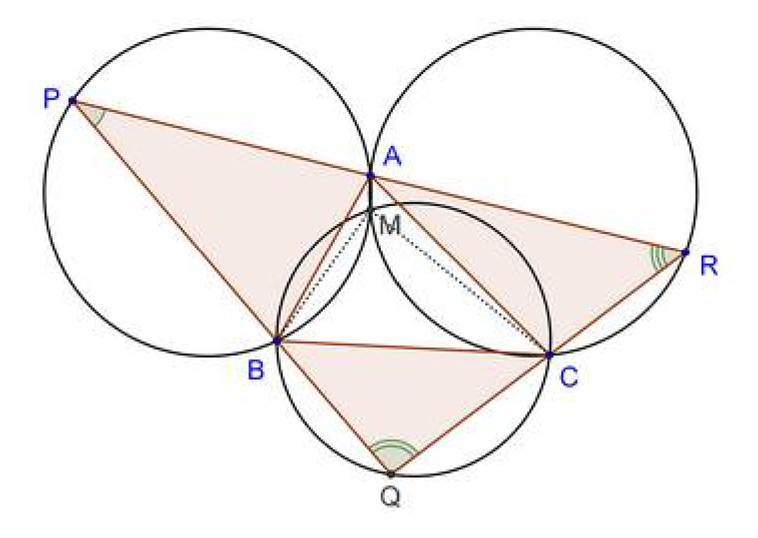


FIG. 4 – Un cas particulier

tant qu'angle de droite, donc modulo π si l'on travaille avec des mesures). La preuve de la question 1.a) reste encore valable car n'utilisant que l'égalité $(PA, PB)+(QB, QC)+(RC, RA) = 0$ (en angles de droites) et les cocyclicités. On peut énoncer :

> **Résultat n°2** : Etant donné un triangle PQR et une droite Δ coupant les supports (PQ), (QR) et (RP) des côtés du triangles en B, C et A (distincts des sommets du triangle, comme sur la FIG. 5), les cercles circonscrits aux triangles BAP, CBQ et ACR sont concourants en un point Ω.

Si l'on applique une seconde fois le résultat n°2 dans la FIG. 5, on s'aperçoit que les cercles circonscrits à BAP, CBQ et PQR sont aussi concourants en un point qui ne peut qu'appartenir à la paire $\{\Omega, B\}$, et en fait ne peut être qu'égal à Ω (si ces trois cercles se concouraient en B, la droite (PQB) couperait le cercle circonscrit à PQR en trois points, ce qui ne se peut pas).
On retient donc que, dans la FIG. 5, le point Ω appartient à quatre cercles et non seulement trois.

Remarque : Le point Ω est appelé *point de Miquel du quadrilatère complet $BCRPAQ$*. C'est le point de concours de quatre cercles, et son existence peut être démontrée en utilisant des similitudes (voir [4], ex. n°80, ou [7], §. 6.3.3).

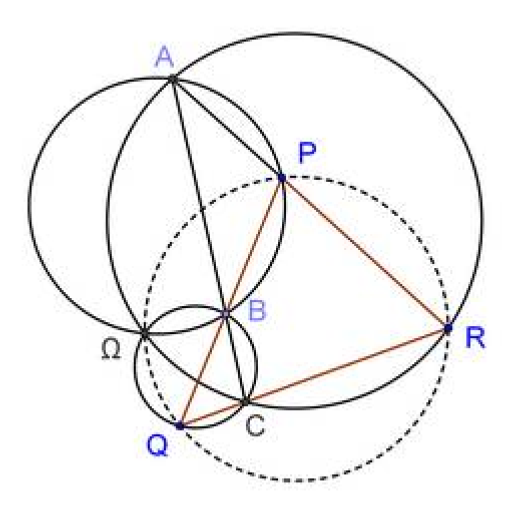


FIG. 5 – Configuration de Miquel

Bibliographie

[1] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, Redécouvrons la géométrie, Dunod, 1971 (traduction de l'ouvrage "Geometry Revisited" paru en 1967).

[2] F. Herbaut, Souvenirs d'oraux du CAPES externe de mathématiques, (en ligne en 2008 à l'adresse : http ://fabien.herbaut.free.fr/oraux2006.html), 2006.

[3] D.-J. Mercier, Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation, Publibook, 2008.

[4] D.-J. Mercier, Exercices pour le CAPES mathématiques (externe et interne) & l'agrégation interne, Algèbre, arithmétique, géométrie et probabilités, Vol. II, Publibook, 2007.

[5] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, 14 leçons rédigées et commentées, Vol. I, Publibook, 2007.

[6] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. II, Publibook, 2006.

[7] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. III, Publibook, 2007.

[8] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. IV, Publibook, 2008.